Математика Л-230911 26.02.2024

Урок № 99

Тема: Первообразная функции. Правила нахождения первообразных.

Срок сдачи работ до 27.02.2024

Теоретическая часть:

1. Определение первообразной функции

Определение. Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X, если для всех x из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

2. Методика нахождения первообразной на примерах

Несколько разъясняющих примеров:

$F(x) = \frac{7x^2}{2}$ *– первообразная для* $f(x) = 7x, x \epsilon \boldsymbol{R}$

Чтобы это подтвердить, возьмем производную

$(\frac{7x^2}{2})' = 7x$

$F'(x) = f(x)$

$F(x) = 3\cos(x)$ *первообразная для* $f(x) = -3\sin(x), x \epsilon \boldsymbol{R}$

Итак, мы привели 2 примера, которые подтверждают определение и используют его.

Напомним две задачи:

Прямая задача: Дана функция $F(x)$. Найти $F'(x)$. Процесс называется дифференцированием.

Обратная задача: Дана функция $f(x)$ – производная неизвестной функции $F(x)$. Найти $F(x) -$ первообразную. Процесс называется интегрированием.

Какие основные инструменты для нахождения первообразных?

3. Таблица первообразных

Нахождение $F(x)$ ведется по:

- таблице первообразных, которую мы повторим;

- правилам отыскания первообразных, которые мы изучим.

Таблица

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	1
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^n, n\epsilon \boldsymbol{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}, x > 0$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin\ x$
$\frac{1}{sin^2 x}$	$-ctg\ x$
$\frac{1}{cos^2 x}$	$tg\ x$

Проверим:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} x = x;$$

$$(2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x}.$$

Таким образом проверяются все строчки таблицы. То есть, выполняется соотношение: $F'(x) = f(x)$.

4. Правила отыскания первообразных с подтверждающими примерами

Переходим к правилам отыскания первообразных.

Правило 1.

Первообразная суммы равна сумме первообразных.

Дано: $F'(x) = f(x). F - \text{первообразная для } f;$

$G'(x) = g(x). G - \text{первообразная для } g.$

Доказать: $F + G$ — первообразная для $f + g$.

Доказательство: $(F + G)' = F' + G' = f + g$, что и требовалось доказать.

5. Пример 1

Функция состоит из двух функций. Найти первообразную функции:

$f(x) = x^2 + cosx$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + \sin x$

Пример подтверждает правило 1.

Правило 2. (о постоянном множителе)

Дано: $F'(x) = f(x)$*, то есть* F *– первообразная для f, k – const.*

Доказать: kF – первообразная для kf.

Доказательство:

Доказательство основывается на определении первообразной и на правиле дифференцирования: $(kF)' = kF' = kf$. Что и требовалось доказать.

Смысл правила: если мы знаем первообразную для *f*, то чтобы получить первообразную для *kf*, нужно первообразную *F* умножить на *k*.

Подтверждающий пример:

$f(x) = 50\cos x$

$F(x) = 50\sin x$

Правило 3. Если $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$, то $y = \frac{1}{k}F(kx + m$ – первообразная для $y = f(kx + m)$.

Дано: $F'(x) = f$.

Доказать: $\left(\frac{1}{k}F(kx + m)\right)' = f(kx + m)$

$\left(\frac{1}{k}F(kx + m)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + m)k = F'(kx + m) = f(kx + m)$, что и требовалось доказать.

6. Пример 2

Если $f(x) = \cos(2x + 1)$,то $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x + 1)$.

Проверка: $\left(\frac{1}{2}\sin(2x+1)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\cos(2x+1)\cdot 2 = \cos(2x+1)$. То есть $F' = f$.

Необходимые пояснения: вместо x мы имеем скобку $(2x+1)$. Как это отражается на нахождении первообразной? Следующим образом: первообразная от $\cos(2x+1)$ – это $\sin(2x+1)$, но надо разделить на коэффициент при *x*.

Пример 1.

Найти одну из первообразных для функции

а) $f(x) = 4x^3 + 2\cos(3x+1)$

Решение:

а) $F(x) = 4\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{1}{3}\sin(3x+1)$

Ответ:

$$F(x) = x^4 + \frac{2}{3}\sin(3x+1)$$

Проверка: $F'(x) = 4x^3 + \frac{2}{3}\cdot 3\sin(3x+1) = 4x^3 + 2\cos(3x+1)$. То есть $F'(x) = f(x)$.

Пример 2.

Найти одну из первообразных для функции

б) $f(x) = \frac{2}{\cos^2(4x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3-4x}}$

Решение:

б) $F(x) = 2\cdot\frac{1}{4}tg(4x+1) + 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\sqrt{3-4x}$

Ответ:

$$F(x) = \frac{1}{2}tg(4x+1) - \frac{1}{2}\sqrt{3-4x}$$

Проверка: $F'(x) = \frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{cos^2(4x+1)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-4}{2\sqrt{3-4x}} = \frac{2}{cos^2(4x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3-4x}}$.

$F'(x) = f(x)$.

Домашнее задание

Найти одну из первообразных для функции $f(x) = \sin(3x-2) - x^5$.

Найти одну из первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{7-3x^5} + tg(7x-3)$.